INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A IX-A

1. O mulţime nevidă $A \subset \mathbb{N}^*$ se va numi ”**perfectă**” dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului ei de elemente.

a) Verificaţi că mulţimea $M = \{1;3;5;7;9\}$ este perfectă.

b) Determinaţi toate mulţimile perfecte cu trei elemente.

c) Demonstraţi că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ există cel puţin o mulţime perfectă cu n elemente.

2. Un număr de 51 insecte minuscule sunt aşezate în interiorul unei plăci pătrate de latură 1.

a) Demonstraţi că o placă pătrată de latură $\frac{1}{5}$ poate fi acoperită cu un disc de rază $\frac{1}{7}$.

b) Demonstraţi că există cel puţin 3 insecte ce pot fi acoperite cu un disc de rază $\frac{1}{7}$.

3. Considerăm un triunghi ABC şi punctele M, N, P pe laturile (AB), (BC), respectiv (CA) astfel încât $AM = BN = CP$. Notăm cu T centrul de greutate al triunghiului MNP.

a) Demonstraţi că $AB \cdot \overrightarrow{AM} = AM \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Demonstraţi că $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{PT} = \vec{0}$.

c) Dacă, în plus, $AB \cdot \overrightarrow{AT} + BC \cdot \overrightarrow{BT} + CA \cdot \overrightarrow{CT} = \vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

4. Considerăm că fiecare punct din plan este colorat cu exact una din culorile *roşu*, *verde*, *galben* sau *albastru* şi cel puţin patru puncte sunt de culori diferite.

a) Demonstraţi că există cel puţin trei puncte necoliniare şi colorate diferit.

b) Demonstraţi că există cel puţin trei puncte distincte coliniare şi colorate diferit.

<u>**Notă**</u>: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A X-A

1. Fie funcția $f:\mathbb{C}\setminus\{i\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$

a) Demonstrați că $f(2)+f(-2)$ este număr real.

b) Demonstrați că $|f(z)|=1$ dacă şi numai dacă $z\in\mathbb{R}$.

c) Dacă $z_0=1+i$ şi pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ avem $z_n=f(z_{n-1})$, aflați z_{2013}.

2. Doi angajați au inițial acelaşi salariu. Datorită crizei, primului angajat i se reduce salariul cu 25%, după care firma angajatoare revine şi îi aplică mărire salarială tot cu 25%. Din motive asemănătoare şi celui de al doilea angajat i se aplică inițial o reducere salarială de 25% iar apoi o majorare de 10% urmată de o nouă majorare de 15%. Care dintre cei doi salariați va avea la final un salariu mai mare?

3. Fie $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$ cu $f(0)=1$ şi $f(x+y)=f(\lg(xy)),(\forall)\ x>0$ şi $y>0$. Demonstrați că:

a) pentru orice $t\geq 2$ există $x>0$ astfel încât $t=x+\dfrac{1}{x}$;

b) $f(t)=1$, pentru orice $t\geq 2$;

c) $f(10^t+1)=f(t)$, pentru orice $t\geq 0$;

d) Determinați funcția f.

4. Un zid în formă de dreptunghi cu înălțimea de 2 metri se acoperă cu plăci dreptunghiulare având fiecare lungimea de 2 metri şi lățimea de 1 metru. Notăm cu a_n numărul de moduri în care putem aşeza plăcile când zidul are lungimea de n metri, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$ şi $a_4=5$.

b) Demonstrați că $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, oricare ar fi $n\geq 3$.

c) Aflați în câte moduri putem placa zidul dacă acesta are lungimea de 10 metri.

<u>Notă</u>: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A XI A

1. Fie matricile $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Determinați $a, b\in\mathbb{R}$ încât $A^2=a\cdot A+b\cdot I_3$

b) Demonstrați că $(I_3+A)\left(I_3-\frac{1}{4}\cdot A\right)=I_3$

c) Demonstrați că matricea $B=I_3+A$ este inversabilă şi calculați B^{-1}.

2. Doi prieteni, Andrei şi Vasile, măsoară fiecare distanța de acasă până la şcoală. Distanța măsurată de Andrei este egală cu x km iar cea măsurată de Vasile este egală cu y km. Ştiind că există $a,b,c\in\{1;2;3\}$, nu neapărat distincte dar astfel încât se verifică sistemul

$$\begin{cases} x+2y=4\\ ax+\ y=5\\ cx+3y=b+6\end{cases}$$

determinați a, b, c şi distanțele x şi y.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

a) Demonstrați că pentru un $a\in\mathbb{R}$ arbitrar ales, $\lim\limits_{x\to\infty}f(ax)=\begin{cases}0, & \text{dacă } a<0\\ 1, & \text{dacă } a=0\\ \infty, & \text{dacă } a>0\end{cases}$

b) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}f(ax)$, $a\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ încât pentru fiecare $x\in\mathbb{R}$ să aibă loc $f(ax)=a\cdot f(x)+b$.

4. O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe aflată în studiu se modifică în timp după legea $T(t)=\sqrt{t^2+a\cdot t+b}-c\cdot t+5$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$ sunt constante ce trebuie determinate şi în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t\geq 0$ ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) Determinați $a, b, c\in\mathbb{R}$ ştiind că $T(1)=7$ şi $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=8$.

b) Cu a, b, c astfel determinați, stabiliți dacă e posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie 0^0.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+e}$. Se cere:

a) Demonstrați că $f(x)+f(1-x)=1$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați primitiva F a funcției f care verifică $F(0)=0$.

c) Calculați $\int_0^1 f(x)\cdot\sin(\pi x)\,dx$

2. Pe $G=(0;+\infty)$ se consideră legea de compoziție notată ”$*$” şi care verifică următoarele două condiții:

(i) $(x+1)*x=1$, $(\forall)\ x\in G$

(ii) $(x\cdot y)*z=x\cdot(y*z)$, $(\forall)\ x,\ y,\ z\in G$

Se cere:

a) Demonstrați că $x*y=\dfrac{x}{y+1}$, $(\forall)\ x,\ y\in G$

b) Studiați dacă $(G;*)$ este structură asociativă;

c) Studiați dacă $(G;*)$ admite element neutru.

3. Un mobil se deplasează pe o traiectorie după legea de mişcare $s:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ cu $s(0)=0$, în care $s(t)$ reprezintă spațiul parcurs de la momentul inițial $t_0=0$ pînă la momentul $t\geq 0$. Ştiind că accelerația sa la momentul $t\geq 0$ este $a(t)=t\cdot e^t$ şi viteza inițială este $v(0)=a>0$, aflați legea de mişcare.

<u>Notă</u>: Este cunoscut că cele trei elemente principale ale unei mişcări, respectiv funcțiile ce descriu spațiul parcurs $s(t)$, viteza momentană $v(t)$ şi accelerația momentană $a(t)$, verifică $s'(t)=v(t)$ şi $v'(t)=a(t)$.

4. Andrei, despre care nicicum nu se poate spune că i-ar fi dragi calculele, s-a hotărât să simplifice toată matematica prin introducerea următoarelor reguli de ”adunare” şi ”înmulțire”: *rezultatul oricărei adunări sau înmulțiri a două numere naturale este, după el, egal cu ultima cifră a rezultatului care s-ar obține după regulile obişnuite*. Astfel, *notând prin* ”$\oplus$” şi ”$\odot$” *adunarea şi înmulțirea după regulile lui Andrei*, vom avea, de pildă, $15\oplus 28=3$ şi $26\odot 39=4$. Se cere:

a) Calculați, după regula lui Andrei, $1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus 10$ şi $1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus 20$.

b) Demonstrați că $1\oplus 2\oplus 3\oplus\ldots\oplus 2013=1$.

c) Considerând $A=\{0;1;2;3;\ldots;9\}$, demonstrați că $(A;\oplus;\odot)$ este inel comutativ.

<u>Notă</u>: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*